

Varianta 78

Subiectul I

- a) $AB = 5$.
- b) $\sin^2 120^\circ + \cos^2 60^\circ = 1$
- c) $S = 24$
- d) $\bar{z} = -3 - 4i$.
- e) $a = 2$ și $b = 5$.
- f) $BC = 9$.

Subiectul II

1.

a) $\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 21 & 7 \end{vmatrix} = -21$.

b) $p = \frac{3}{5}$.

c) $x = -\frac{1}{2}$.

d) $x = \frac{1}{2}$.

e) $E = 1$.

2.

a) $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \forall x > 1$.

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 1$.

c) Din punctul a) rezultă $f'(x) > 0, \forall x > 1 \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(1, \infty)$.

d) $\int_2^3 f(x) dx = -\ln 2 + 1$.

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n - 13}{13n + 12} = \frac{12}{13}$.

Subiectul III

a) $f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$ și $x_2 = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$.

b) $x^2 + 3x + 2 < 0 \Rightarrow x \in (-2, -1)$.

- c) $\frac{1}{g(n)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2)-(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$
- d) $S = \frac{1}{g(1)} + \frac{1}{g(2)} + \dots + \frac{1}{g(2006)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2007} - \frac{1}{2008}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2008} = \frac{1003}{2008}.$
- e) $\left(X + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = X^2 + 3X + 3 = f(X).$
- f) Dacă $\exists s, t \in \mathbf{R}[X]$ astfel încât $g(x) = s^2(x) + t^2(x)$, atunci $s^2(x) + t^2(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$, contradicție cu punctul b).
- g) Fie $u = x + \frac{3}{2}; v = \frac{1}{2}i, u, v \in \mathbf{C}[X]$ și $u^2 + v^2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}i^2\right) = x^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = x^2 + 3x + 2 = g.$

Subiectul IV

- a) $f'(x) = -2e^{-2x}, x \in \mathbf{R}.$
- b) Funcția exponențială este strict pozitivă $\Rightarrow f(x) > 0$ și $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbf{R}.$
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-2x} + 1) = 1 \Rightarrow y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty.$
- d) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (e^{-2x} + 1) dx = \left(\frac{e^{-2x}}{-2} + x\right) \Big|_0^1 = \frac{3e^2 - 1}{2e^2}.$
- e) $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $\mathbf{R}.$
- f) $f(0) = e^0 + 1 = 2; f(1) = e^{-2} + 1 \Rightarrow f(0) + f(1) = 3 + e^{-2} \Rightarrow x = 0$ este soluție. f fiind strict descrescătoare pe $\mathbf{R} \Rightarrow$ soluția este unică. Dacă ar exista o soluție $x_0 > 0$ atunci $f(x_0) + f(x_0 + 1) < f(0) + f(1) = 3 + e^{-2}$, contradicție. Dacă ar exista o soluție $y_0 < 0$ atunci $f(y_0) + f(y_0 + 1) > f(0) + f(1) = 3 + e^{-2}$, contradicție.
- g) Luăm $g(x) = x + 1$ și $h(x) = x - e^{-2x}$. Avem $\forall x \in \mathbf{R}, g'(x) = 1$ și $\forall x \in \mathbf{R}, h'(x) = 1 + 2e^{-2x} > 0 \Rightarrow g, h$ sunt crescătoare pe $\mathbf{R}$ și $g(x) - h(x) = x - x + 1 + e^{-2x} = e^{-2x} + 1 = f(x).$